5.1) a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Como es una matriz anti-simétrica, puedo asegurar que es unitariamente diagonalizable:

$$p(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 1$$

Autovalores: $\lambda^2 + 1 = 0 \nearrow \lambda_1 = i$, $\searrow \lambda_2 = -i$

Para $\lambda = i$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \to F1 + iF2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to ix + y = 0 \to y = -ix$$

$$\to \bar{x} = x\underline{(1, -i)}$$

AUTOVECTOR $\lambda = i$

Para $\lambda = -i$, el autovector es el conjugado:

AUTOVECTOR $\lambda = -i$: $(1; i)$

Normalizo estos vectores, entonces:

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-i}{\sqrt{2}}\right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

y por lo tanto forman una base ortonormal (ya que eran ortogonales).

→ Puedo armar U unitaria:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad y \quad \Lambda = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad tq \quad A = U \Lambda U^*$$

b) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \lambda - \cos\theta \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + \underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{=1}.$$

$$\rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1.$$

Autovalores:

$$\lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1 = 0$$

$$\frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} \rightarrow \frac{2\cos\theta \pm 2.\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \lambda_2 = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}}$$

Para $\lambda = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\begin{pmatrix} i\,\mathrm{sen}\,\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & i\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} F_2 \rightarrow F_1 + iF_2 \quad \begin{pmatrix} i\,\mathrm{sen}\,\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad i\,\mathrm{sen}\,\theta\, x + \mathrm{sen}\,\theta\, y = 0 \rightarrow \quad y = -\frac{i\,\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}}{\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}}\, x \rightarrow y = -ix$$

$$\rightarrow \bar{X} = x.\underbrace{(1; -i)}$$

AUTOVECTOR

$\lambda = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

v_1

Para $\underline{\lambda = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}$ será el conjugado:

Autovector $\lambda = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$: $(1; i)$ v_2

Como v_1 y v_2 son ortogonales, los normalizo y obtengo una base ortonormal.

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}\right) \qquad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

Armo U unitaria:

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}} \qquad \boxed{\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \end{bmatrix}}$$

$$A = U \Lambda U^{*}$$ ✓